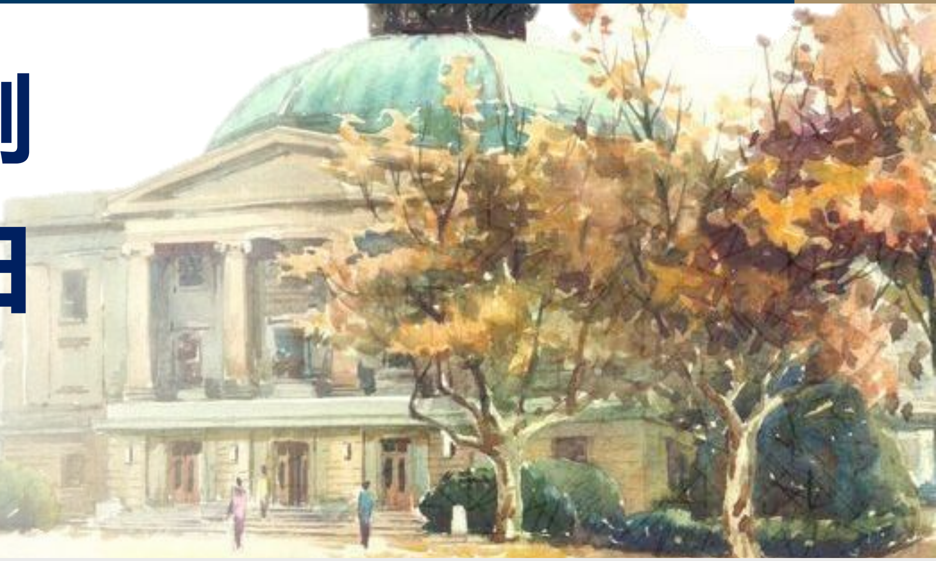
交通分配理论和求解算法分析

汇 报 人： 张宏刚

2023年03月17日

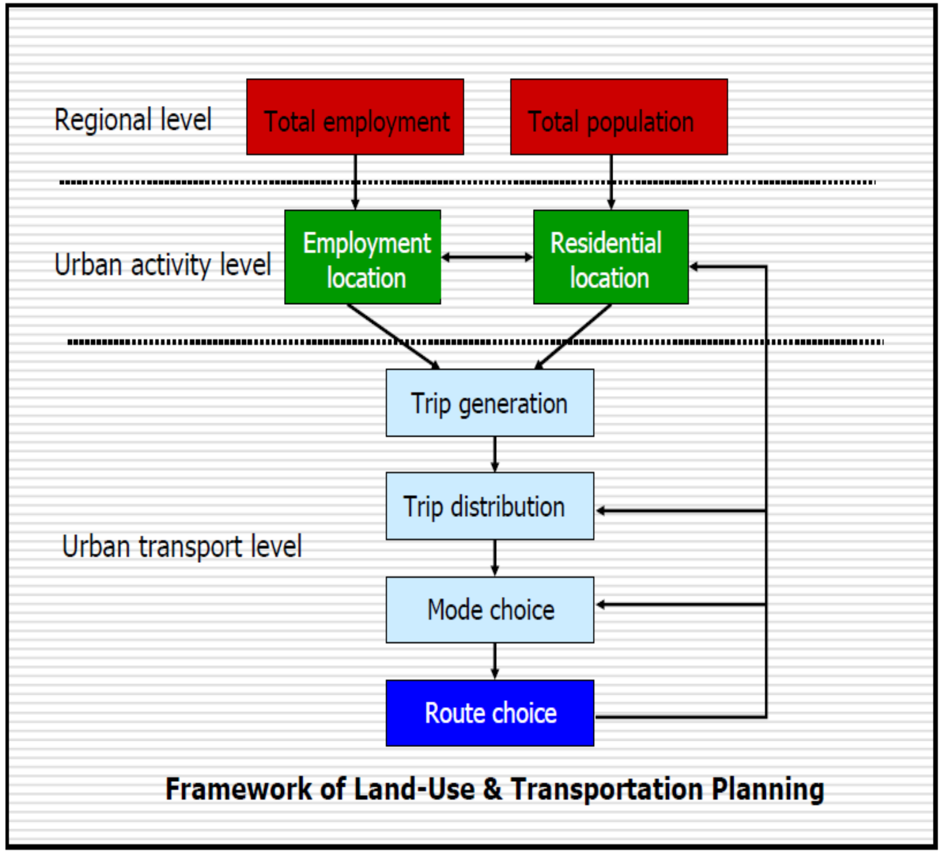


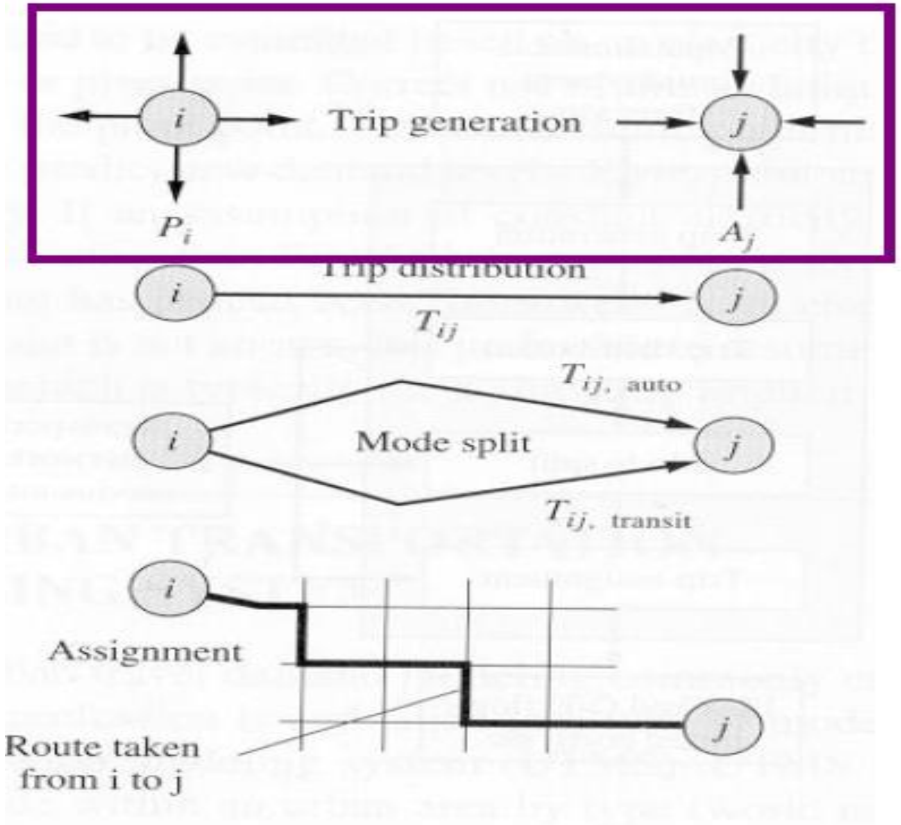
CONTENTS

一、交通分配理论

一、交通分配理论

- 交通规划理论的核心：**四阶段法**
  - 出行生成、出行分布、方式划分、交通分配





1. 输出: P/A 表

2. 输入: P/A 表，距离矩阵

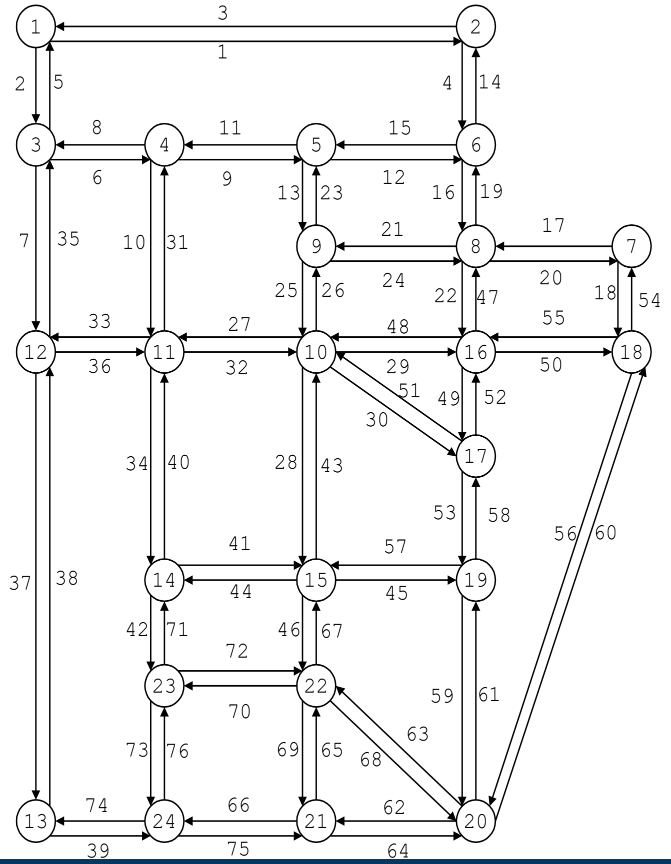
   输出：OD矩阵

3. 输出：多模式OD矩阵

4. 输出：网络中每条路径/路段的预测交通流量

□ 交通规划理论的核心：**四阶段法**

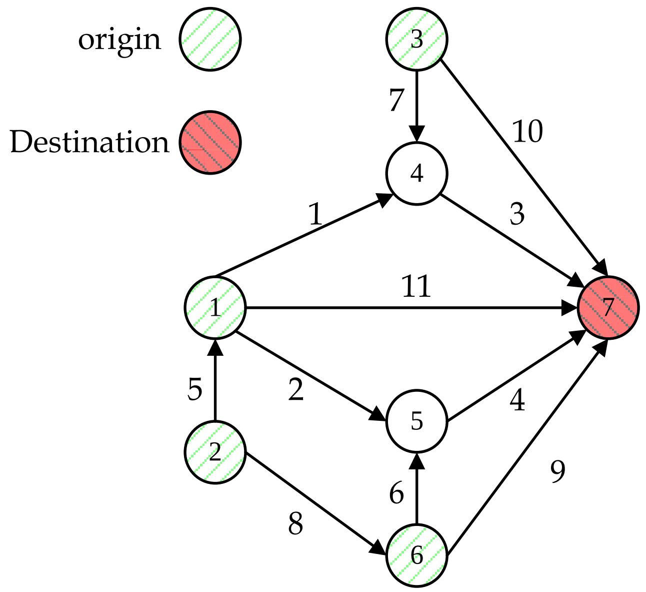
■ 出行生成、出行分布、方式划分、**交通分配**



- 多个OD需求对
  - 1 → 18: 5000 pcu/h
  - 2 → 13: 4000 pcu/h
  - 10 → 20: 8000 pcu/h
- 对于一个OD对,有多条路径可以选择 。那么用户如何选择路径?
- 对于一个路段，不同OD对的交通流是否加载是根据该路段的拥堵水平来决定的。

因此交通分配是个路径选择问题

- **道路需求方（司机、通勤者、出行者）的出行行为假设**
  - 出行时将选择最短路径
  - 精确预测各条路段/路径的出行时间信息
  - 不与其他出行者合作，选择路径时仅考虑自己的出行时间



- **网络属性**
  - 路段流量：x_a 路段容量：C_a
  - 路段出行时间：$t_a(x_a) = t_a^0 \times \left[1.0 + 0.15\left(x_a / C_a\right)^4\right]$
  - 连接OD对r-s的第k条路径的流量：f_k^{rs}
  - 第k条路径的出行时间：c_k^{rs}
  - O-D对r-s间的总出行流量：q_{rs}

$$\delta_{ak}^{rs} = \begin{cases} 1, & \text{如果OD对r-s间的路径k使用了路段a} \\ 0, & \text{如果OD对r-s间的路径k没有使用路段a} \end{cases}$$

□ 路网（供给方）假设

- 仅考虑高峰小时的路网时（静态路网、而非动态路网），总的OD需求量不变
- 流量守恒
  - 路径流量: $f_k^{rs} \geq 0$
  - 路径流量与OD需求的关联关系:

$$q_{rs} = \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs}$$

  - 路径流量和路段流量的关联关系：

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{ak}^{rs}$$

流量守恒条件:

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{ak}^{rs}, \forall a \in A$$

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} = q_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

$$f_k^{rs} \geq 0, \forall k \in K_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

- 路径出行时间

$$c_k^{rs} = \sum_{a \in A} t_a\left(x_a\right) \delta_{ak}^{rs}$$

- **Wardrop第一原理 (User Equilibrium, UE；用户均衡)**
  - 所有被使用路径的**出行时间相等**，且都**小于等于**那些没被使用路径的出行时间
- **达到用户均衡(UE)时**
  - 没有出行者可以通过单方改变出行路径来降低其出行时间
- **用户均衡的数学表示/定义**

$$(1)\ f_k^{rs} \times \left[c_k^{rs} - u^{rs} \right] = 0, \forall k \in K_{rs}, r \in R, s \in S$$

$$(2)\ c_k^{rs} \ge u^{rs} \ge 0, \forall k \in K_{rs}, r \in R, s \in S$$

u^{rs} —达到用户均衡时，OD对r-s之间的最短路径上的出行时间

□ Beckmann转换 (UE的最优化模型)

$$\min z(x) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$$

subject to:

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{ak}^{rs}, \forall a \in A$$

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} = q_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

$$f_k^{rs} \geq 0, \forall k \in K_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

流量守恒条件

约束条件乘子： u_{rs} λ_k^{rs}

基于Beckmann变换式，1975年LeBlanc用**Frank-Wolfe算法**对该模型进行了**高效求解**，极大推动了交通网络分析的工程应用

□ Beckmann转换的KKT条件

■ KKT等式

$$\frac{\partial z(x)}{\partial f_k^{rs}}+\sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\frac{\partial\left(q_{rs}-\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}\right)}{\partial f_k^{rs}}u_{rs}+\frac{-\partial f_k^{rs}\lambda_k^{rs}}{\partial f_k^{rs}}=0 \Rightarrow \sum_{a\in A} t_a\delta_{ak}^{rs}-u_{rs}=\lambda_k^{rs}$$

第K条路径的成本

■ 互补松弛条件

$$\lambda_k^{rs}\times f_k^{rs}=0$$

■ 非负性

■ 可行性

$$\lambda_k^{rs}\geq 0$$

$$f_k^{rs}\times\left[c_k^{rs}-u^{rs}\right]=0$$

$$c_k^{rs}\geq u^{rs}\geq 0$$

等价性：Beckmann转换的KKT条件证明了它的最优解满足UE条件

□ Beckmann转换的凸性

- Beckmann转换目标函数的海塞矩阵

$$\nabla^2 z(x) = \begin{pmatrix} t'(x_1) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & t'(x_a) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

- 因为路段出行时间是路段流量的严格增函数，所以它的一阶导数总是大于0
- BPR（Bureau of Public Roads）函数

$$t_a(x_a) = t_a^0 \times \left[1.0 + 0.15(x_a / C_a)^4\right]$$

海塞矩阵的主子行列式的值为正：**正定矩阵**
Beckmann转换的目标函数是**严格凸函数**

□ Beckmann转换的凸性

- UE模型的可行域只包含线性约束，所以它的可行集是凸集

$$x_a = \sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}\delta_{ak}^{rs}, \forall a \in A$$

$$\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs} = q_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

$$f_k^{rs} \ge 0, \forall k \in K_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

- UE模型有严格凸的目标函数，而且目标函数是被定义在凸集上的

➡ **凸性：解的存在性，解的唯一性**

□ Wardrop第二原理 (System Optimum, SO；系统最优)

- 在系统最优状态下，路网上的所有出行者的总出行时间（平均出行时间）最短

□ 总出行时间

$$\tilde{z}(x)=\sum_{a\in A}\left[x_a\times t_a\left(x_a\right)\right]=\sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\sum_{k\in K_{rs}}\left[c_k^{rs}\times f_k^{rs}\right]$$

□ 平均出行时间

$$\frac{\sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\sum_{k\in K_{rs}}\left[c_k^{rs}\times f_k^{rs}\right]}{\sum_{r\in R}\sum_{s\in S}q_{rs}}$$

□ Wardrop第二原理 (System Optimum, SO；系统最优)

- 在系统最优状态下，路网上的所有出行者的总出行时间（平均出行时间）最短

□ 凸规划模型

系统总出行时间

$$\min \tilde{z}(x) = \sum_{a\in A} x_a t_a(x_a)$$

subject to

$$x_a = \sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}\delta_{ak}^{rs}, \forall a \in A$$

$$\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs} = q_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

$$f_k^{rs} \geq 0, \forall k \in K_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

- 系统最优模型的最优解**并不是一种均衡状态**
- 为了使系统的总出行时间最短，SO需要路网中的所有出行者**进行联合决策**而不是单个出行者的决策
- 在SO模式下，出行者可以通过**单方**改变出行路线来降低自己的出行时间
- **SO模式在现实中不可能自动出现**，因此SO模型不能也不应该作为一种实际的路径选择模型

□ SO模型 VS UE模型

- 当路段出行时间是一个常数时，UE模型与SO模型等价
- 假设

$$t_a(x_a)=t_a^0, \forall a \in A$$ 其中 t_a^0 路段a的自由流出行时间

- 那么

$$z(x)=\sum_{a\in A}\int_0^{x_a} t_a(\omega)d\omega=\sum_{a\in A}\int_0^{x_a} t_a^0 d\omega=\sum_{a\in A} x_a t_a^0$$

$$\tilde{z}(x)=\sum_{a\in A} x_a t_a(x_a)=\sum_{a\in A} x_a t_a^0$$

$$\Rightarrow \quad z(x)=\tilde{z}(x)$$

□ SO模型 VS UE模型

■ 边际出行时间函数（Marginal Cost Function）

$$\tilde{t}_a(x_a) = \frac{d\left[x_a t_a(x_a)\right]}{dx_a}$$

$$\tilde{t}_a(x_a) = t_a(x_a) + x_a t'(x_a), a \in A \qquad t'(x_a) = \frac{dt_a(x_a)}{dx_a}, a \in A$$

■ 边际出行时间函数的含义：

$t_a(x_a)$: 路段上每个出行者所经历的出行时间

$t'(x_a)$: 新增加一单位流量对已经使用该路段的每一位出行者所增加额外的出行时间

$\frac{d\left[x_a t_a(x_a)\right]}{dx_a}$: 新增加一单位流量，该路段的总出行时间的变化值。

□ SO模型 VS UE模型

■ SO模型等价于用“边际出行时间函数” 作为路段出行时间函数的UE模型

$$x_a t_a(x_a) = \int_0^{x_a} \left[t_a(\omega) + \omega t'(\omega) \right] d\omega = \int_0^{x_a} \tilde{t}_a(\omega) d\omega$$

■ 即如下两个模型等价：

$$\min \tilde{z}(x) = \sum_{a \in A} x_a t_a(x_a)$$

s.t.

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{ak}^{rs}, \forall a \in A$$

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} = q_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

$$f_k^{rs} \geq 0, \forall k \in K_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

$\Leftrightarrow$

$$\min \tilde{z}(x) = \sum_{a \in A} x_a t_a(x_a) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} \tilde{t}_a(\omega) d\omega$$

s.t.

$$x_a = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{ak}^{rs}, \forall a \in A$$

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_k^{rs} = q_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

$$f_k^{rs} \geq 0, \forall k \in K_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

□用户均衡的假设条件

- 出行者总是选择最短路出行
- 出行者互相不协作的
- 出行者能够精确获知路径出行时间
- OD出行需求固定不变
- 路径交通流不受路段容量的限制
- 路段交通阻抗只跟该路段的交通流量有关

□用户均衡的拓展研究

- 动态用户均衡
- 随机用户均衡
- 多目标的用户均衡
- 弹性需求下的交通分配
- 容量限制下的交通分配
- 不对称的交通分配理论

二、求解算法体系（串行 - 并行）

二、求解算法体系

□ 基于串行的交通分配问题求解体系

1956年 Beckmann首次将交通分配问题转换为一个凸规划问题

1969年 Dafermos首次提出基于路径的算法求解交通分配问题

1974年 Nguyen首次提出基于起点的算法求解交通分配问题

1975年 LeBlanc首次提出基于路段的算法Frank-Wolfe求解交通分配问题

1982-2012年 针对Frank-Wolfe算法的一系列改进算法被提出来

1994年 Jayakrishnan提出梯度投影算法求解交通分配问题

2002年 Bar-Gera提出基于Bush的算法求解交通分配问题

2009年 Florian提出投影梯度算法求解交通分配问题

2010年 Bar-Gera提出基于可替换路径对的算法求解交通分配问题

2013年 Mitradjieva提出共轭Frank-Wolfe算法

2014年 Gentile提出LUCE算法求解交通分配问题

2018年 Xie等提出改进梯度投影/贪婪算法求解交通分配问题

基于路段的算法（Link-Based） 基于路径的算法（Path-Based） 基于起点的算法（Origin-Based）

□ 基于串行的交通分配问题求解体系

Algorithm Classes	Decision Variables	Convergence Rate	Memory Requirement	Representative Algorithms	Update Policies
Link-based	Link flow	Slow	Low	Frank-Wolfe (LeBlanc et al. 1975)	Jacobi
				Improved Frank-Wolfe (Chen et al. 2002)	Gauss-Seidel
				Conjugate Frank-Wolfe (Mitradjieva and Lindberg 2013)	Jacobi
Path-based	Path flow	Fast	High	DSD (Larsson and Patriksson 1992)	Gauss-Seidel
				Gradient projection (Jayakrishnan et al. 1994)	Gauss-Seidel
				Projected gradient (Florian et al. 2009)	Gauss-Seidel
				Greedy (Xie et al. 2018)	Gauss-Seidel
				Reduced gradient (Babazadeh et al. 2020)	Gauss-Seidel
Bush-based	Origin-base link/path flow	Fast	Moderate	OBA (Bar-Gera 2002)	Gauss-Seidel
				Algorithm B (Dial 2006)	Gauss-Seidel
				QBA (Nie 2010)	Gauss-Seidel
				TAPAS (Bar-Gera 2010)	Gauss-Seidel
				LUCE (Gentile 2014)	Gauss-Seidel
				iTAPAS (Xie and Xie 2016)	Gauss-Seidel

基于并行的交通分配问题求解体系

- 网络分割
- 流量加载并行化
- 模型分解

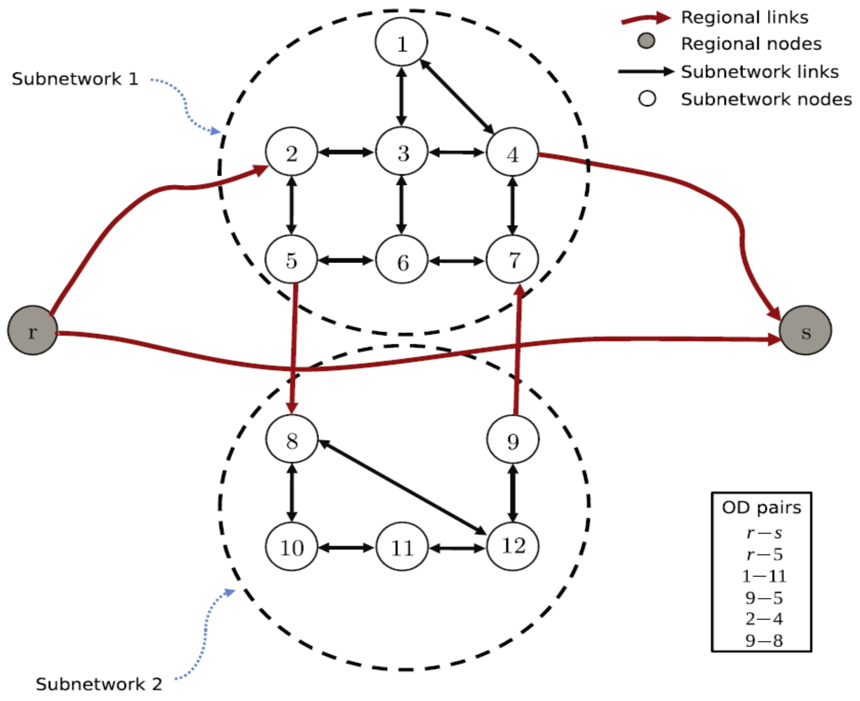
$$\min\ f(\mathbf{x})=\sum_{a\in A}\int_0^{v_a} t_a(w)\,dw$$

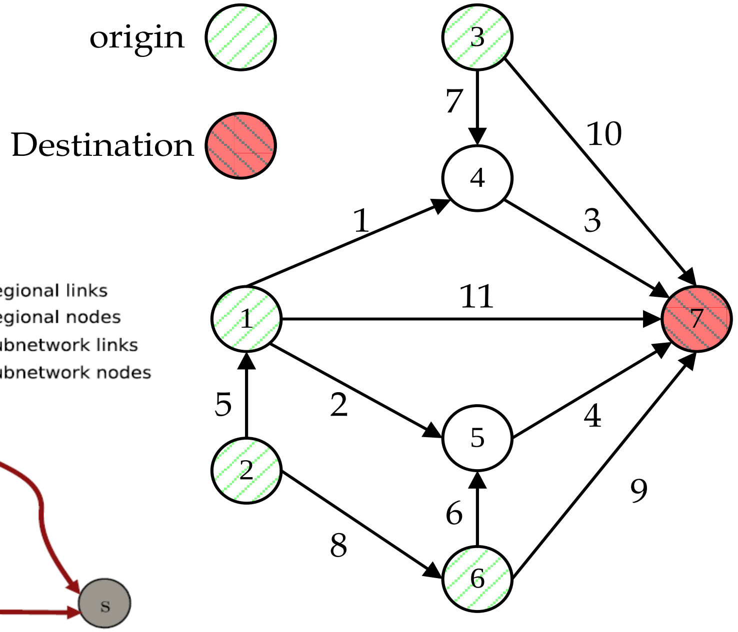
S.T.

$$v_a=\sum_{rs\in W}\sum_{k\in K^{rs}} f_k^{rs}\delta_{a,k}^{rs},\forall a\in A$$

$$\sum_{k\in K^{rs}} f_k^{rs}=q^{rs},\forall rs\in W$$

$$f_k^{rs}\geq 0,\forall k\in K^{rs},rs\in W$$

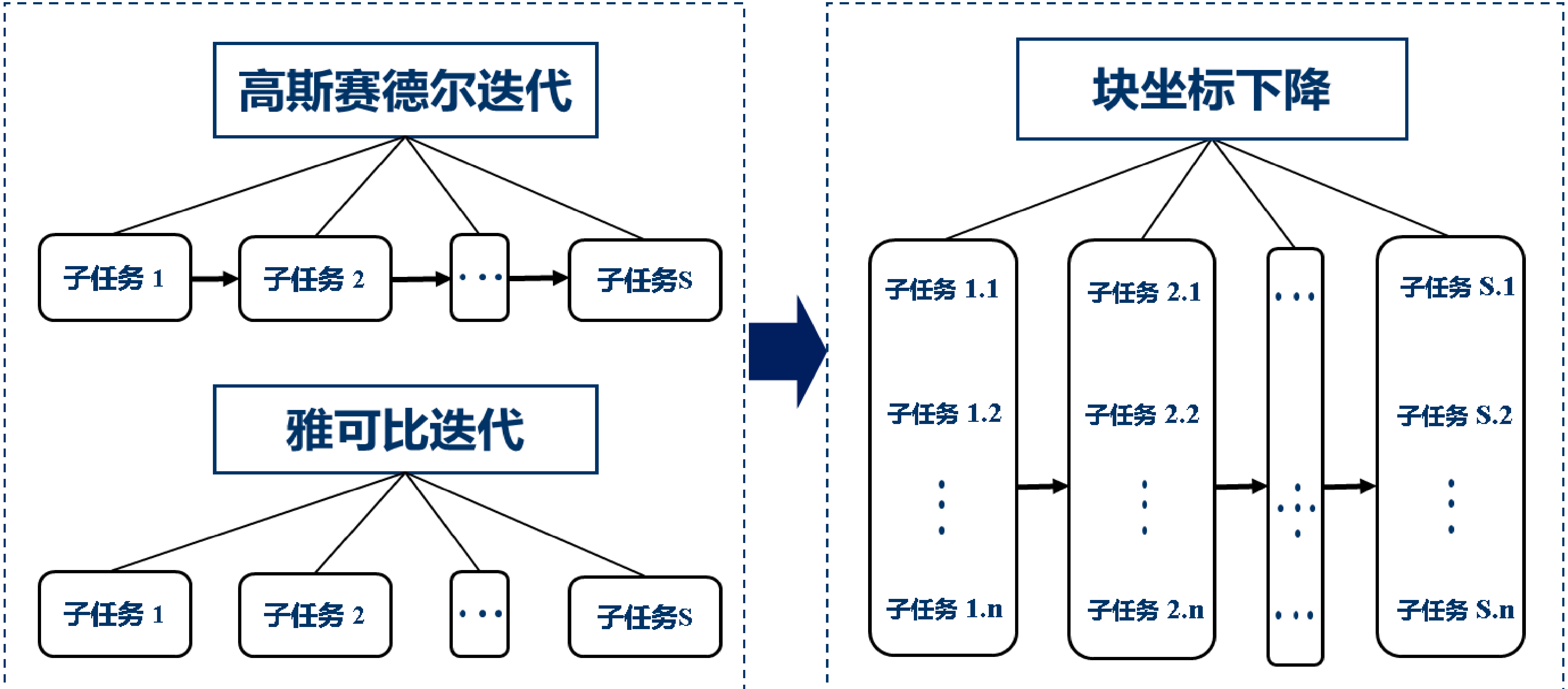




Jafari, E., Pandey, V., Boyles, S.D., 2017. A decomposition approach to the static traffic assignment problem. Transportation Research Part B: Methodological 105, 270–296.

流量加载并行化

- 突破传统流量加载策略，提出一种全新的“块坐标下降”算法框架

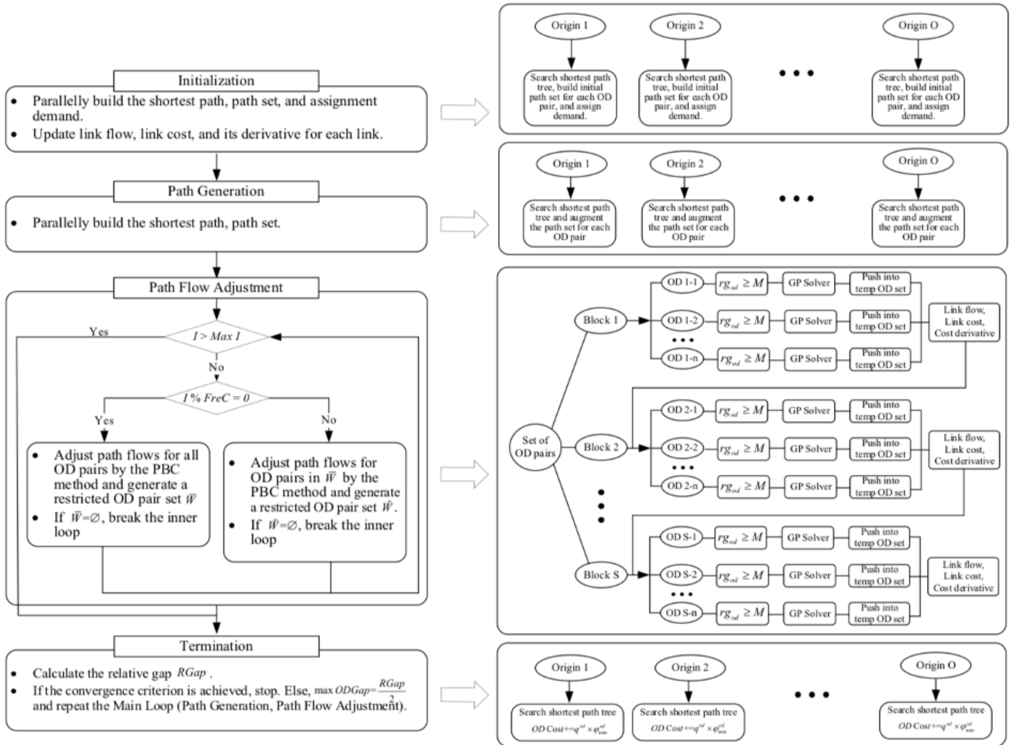


二、求解算法体系

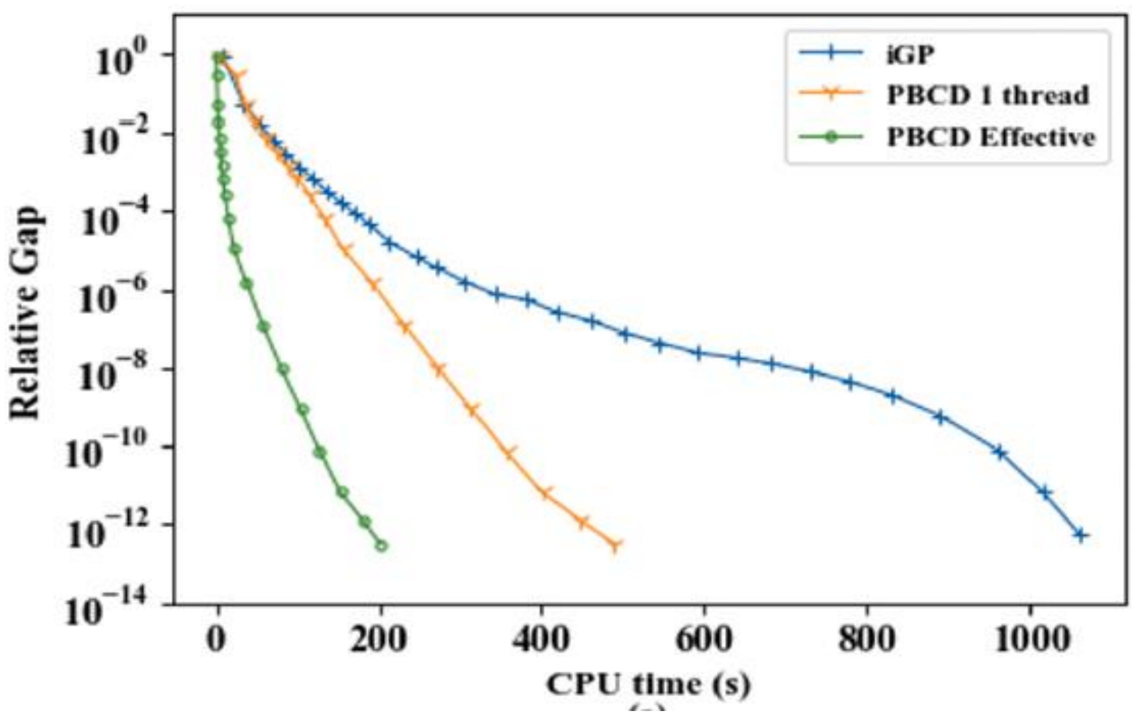
□ 流量加载并行化

■ 分析算法结构，识别和并行化IGP算法中的高算力开销组件，设计适用于分布式计算的PBCD算法

块坐标下降迭代



Phi网络测试结果



Chen, X., **Liu, Z.**, Zhang, K., Wang, Z., 2020. A parallel computing approach to solve traffic assignment using path-based gradient projection algorithm. ***Transportation Research Part C***, 120, 102809.

二、求解算法体系

□ 模型分解

■ 基于起点的优化模型

$$\min z(x) = \sum_{a\in A} \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$$

subject to:

$$x_a = \sum_{r\in R} \sum_{s\in S} \sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs} \delta_{ak}^{rs}, \forall a \in A$$

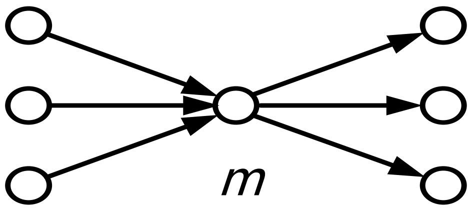
$$\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs} = q_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

$$f_k^{rs} \geq 0, \forall k \in K_{rs}, \forall r \in R, \forall s \in S$$

$$\min f(\mathbf{x}) = \sum_{a\in A} \int_0^{\sum_{o\in O} v_a^o} t_a(w) dw$$

$$\sum_{\substack{a\in A \\ t(a)=m}} v_a^o - \sum_{\substack{a\in A \\ h(a)=m}} v_a^o = g_m^o, \forall o \in O, m \in N$$

$$v_a^o \geq 0, \forall o \in O, a \in A$$



模型分解

- 基于交替方向乘子法（ADMM），创立了交通分配模型并行拆分技术

优化模型:

$$L_0(\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{a\in A}\int_0^{\sum_{o\in O} v_a^o} t_a(w)\,dw + \sum_{o\in O}\sum_{n\in N}\lambda_n^o H_n^o$$

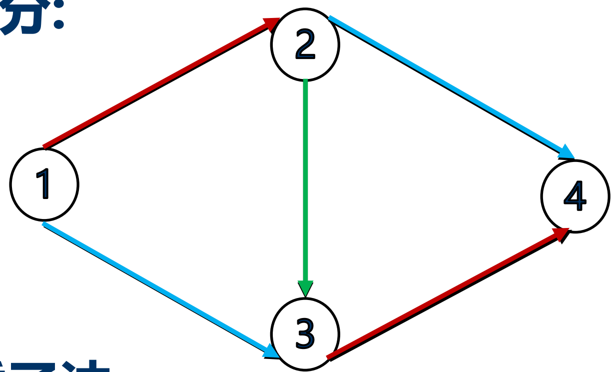
$$L_\rho\left(\mathbf{v}_{B_1}^{(i)},\mathbf{v}_{B_2}^{(i+1)},\mathbf{v}_{B_3}^{(i+1)},\boldsymbol{\lambda}^{(i)}\right)=\sum_{a\in B_p} L_\rho^{B_p,a}\left(\mathbf{v}_a\right)$$

$$\boxed{\mathbf{v}_{B_1}^{(i+1)} := \arg\min_{\mathbf{v}_{B_1}\geq 0} L_\rho^{B_1}\left(\mathbf{v}_{B_1},\mathbf{v}_{B_2}^{(i)},\mathbf{v}_{B_3}^{(i)},\boldsymbol{\lambda}^{(i)}\right)}$$

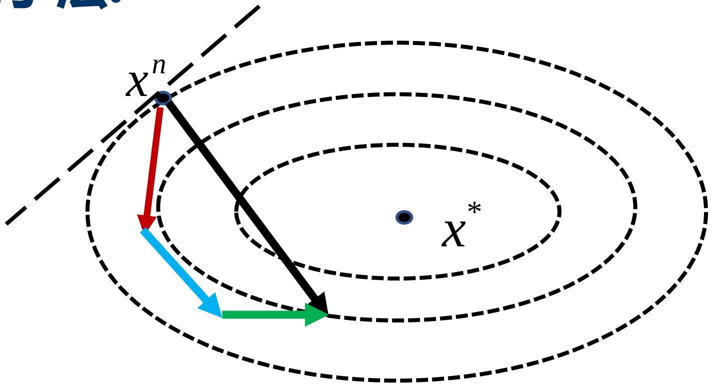
$$\boxed{\mathbf{v}_{B_2}^{(i+1)} := \arg\min_{\mathbf{v}_{B_2}\geq 0} L_\rho^{B_2}\left(\mathbf{v}_{B_1}^{(i+1)},\mathbf{v}_{B_2},\mathbf{v}_{B_3}^{(i)},\boldsymbol{\lambda}^{(i)}\right)}$$

$$\boxed{\mathbf{v}_{B_3}^{(i+1)} := \arg\min_{\mathbf{v}_{B_3}\geq 0} L_\rho^{B_3}\left(\mathbf{v}_{B_1}^{(i+1)},\mathbf{v}_{B_2}^{(i+1)},\mathbf{v}_{B_3},\boldsymbol{\lambda}^{(i)}\right)}$$

路网并行拆分:



交替方向乘子法:



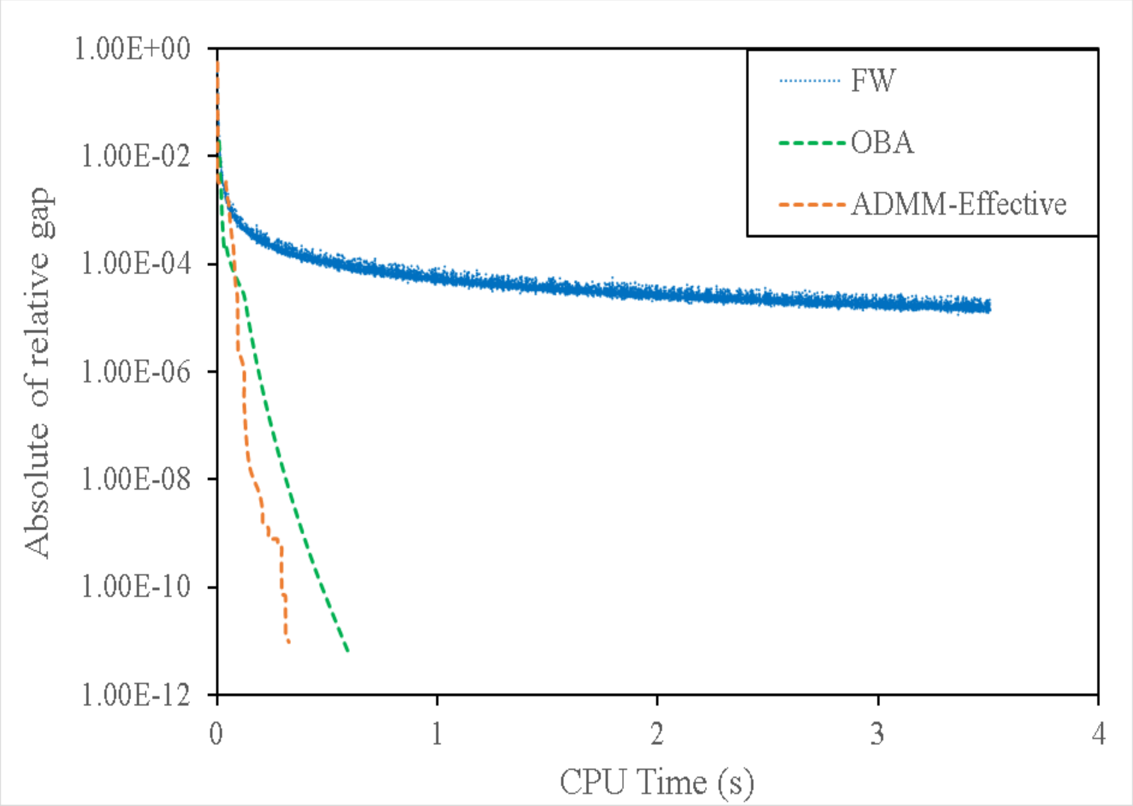
Liu, Z., Chen, X., Hu, J., Wang, S., Zhang, K., Zhang, H. (2022) An alternating direction method of multipliers for solving user equilibrium problem. DOI: 10.13140/RG.2.2.34937.54885.

三、求解算法体系

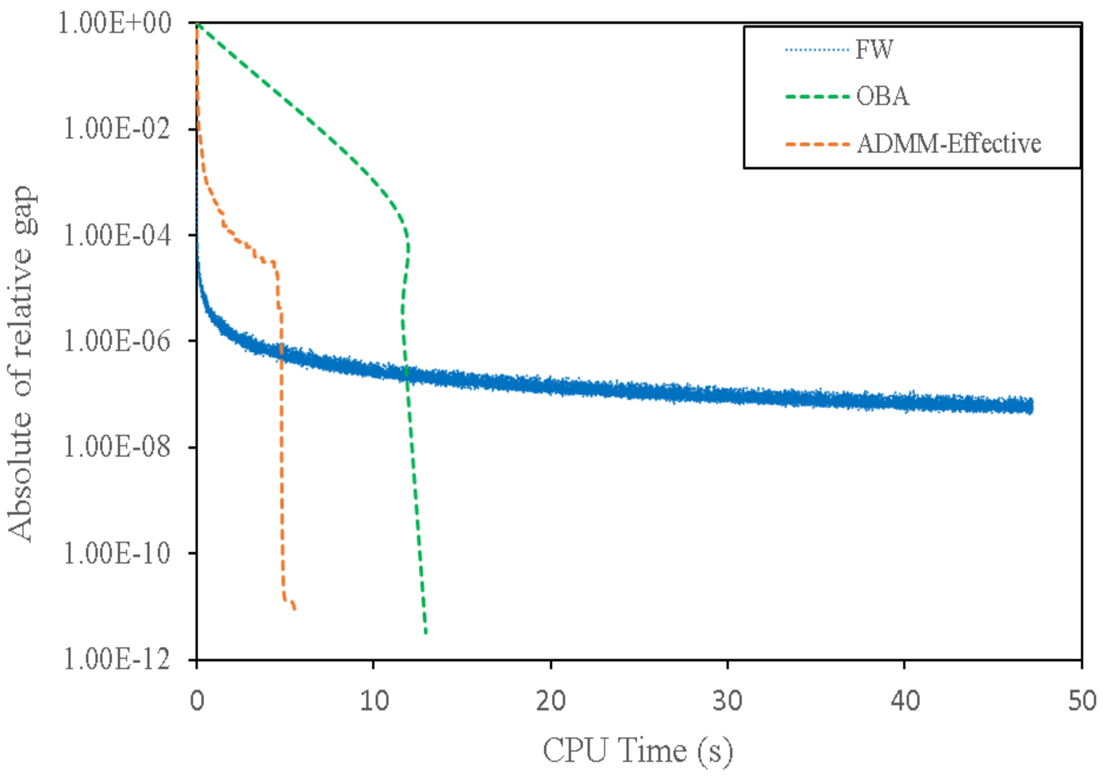
典型城市应用：交通网络流分配计算

- 提出了基于边染色的核心分块原则，并应用同步并行机制对各个模块进行计算
- 交通分配计算并行度提升1000倍

Sioux Falls网络



Anaheim网络



谢谢您的倾听
敬请批评指正